平成２９年度

東京大学大学院 工学系研究科
マテリアル工学専攻
入学試験問題

マテリアル工学基礎

平成 28 年 8 月 30 日（火）　午後 1:00 ～ 4:00

受験番号(Examinee No.)					

- 注意事項 -

1) 試験時間は 180 分である。
2) 問題はマテリアル工学基礎の問題冊子（5 問）および化学（マテリアル工学専攻受験者用）の問題冊子（3 問）の 8 問ある。この中から 4 問を選択して解答すること。5 問以上解答した場合は全問無効となる。
3) 解答は必ず 1 問を 1 枚の解答用紙に記入すること。解答用紙には選択した問題の番号を記入すること。用紙の表面だけで書ききれない場合には，裏面を使用すること。
4) 日本語か英語で解答すること。
5) 計算には問題冊子の余白などを適宜使用すること。
6) 問題冊子にも受験番号を記入すること。
7) 問題冊子は持ち帰らないこと。

（計算用紙）

（計算用紙）

(計算用紙)

（計算用紙）

【第４問】

鉛直下方向への重力加速度を g とし，以下の問いに答えよ。

1. 図１に示すように，長さ l の棒の一端に質量 m の重りを取り付け，反対側を支点 O に固定した系を考える。棒は支点 O を中心に，ある鉛直面内を自由に回転できるものとし，鉛直方向と棒のなす角度を ϕ とする。また，棒の質量・太さならびに重りの大きさは無視できるものとする。
   (1) 系の全運動エネルギー T と全ポテンシャルエネルギー V を求めよ。
   (2) 系の運動方程式を導け。
   (3) 全エネルギーを求め，エネルギー保存則が成り立つことを示せ。

2. 図２に示すように，支点 O を中心に自由に回転できる，質量 M，半径 a の滑車に，質量 m の重りが伸びないロープで吊るされている系を考える。初期状態は静止しているとし，初期状態からの滑車の回転角を ϕ とする。また，ロープの質量は無視できるものとする。
   (1) 滑車の点 O 周りの慣性モーメントをその導出過程を含め示せ。
   (2) 系の全運動エネルギー T と全ポテンシャルエネルギー V を求めよ。
   (3) 系の運動方程式を導け。

3. 図３に示すように，右端がローラー支点で支えられた長さ l の片持梁に等分布荷重 p が作用している。梁の断面二次モーメント I とヤング率 E は一様，梁の質量は無視できるものとする。
   (1) 仮に右端の支点がないとした場合，右端における梁のたわみ量を求めよ。
   (2) 右端の支点がある場合，支点から受ける反力を求めよ。

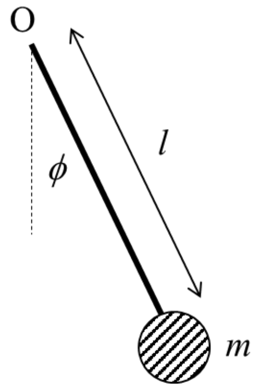

図 1

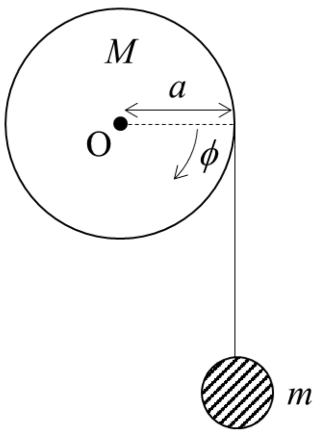

図 2

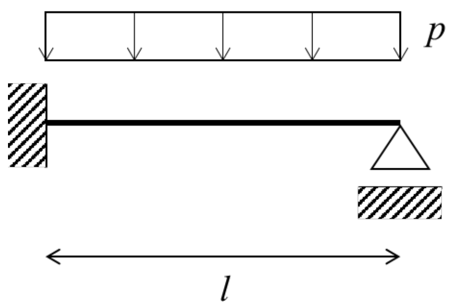

図 3

【第５問】

1. 3次元の自由電子気体を考える。自由電子気体の波動関数は x, y, z 方向について周期 L の周期的境界条件を満たすとする。この周期的境界条件を満たす自由電子気体の波動関数は $\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$ と書ける。$\mathbf{r} = (x, y, z)$ は位置ベクトル，$\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ は波数ベクトルであり，k_x, k_y, k_z は $0, \pm\frac{2\pi}{L}, \pm\frac{4\pi}{L}, ...$ の値を取る。ここで，電子の質量を m，$\hbar = \frac{h}{2\pi}$ （h：プランク定数），虚数単位を i とする。

(1) 波動関数 $\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ が周期的境界条件を満たすことを示せ。

(2) エネルギー固有値が $E_{\mathbf{k}} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2\right)$ であることを示せ。

(3) $\mathbf{k}$ 空間において原点を中心とする半径 k の球の内部にある電子状態数を N とする。N を k，L を用いて表せ。ただし，$k \gg \frac{2\pi}{L}$ とする。

(4) 問(3)で考えた半径 k の球の表面における電子状態のエネルギーを E とする。N を E，L，m を用いて表せ。

(5) 単位体積あたりの状態密度 D を E，m を用いて表せ。

2. 周期ポテンシャル$V(x)=V_0\cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right)$の中を運動する1次元電子を考える。電子波$\exp(ikx)$はブリュアンゾーン端$k=\pm\frac{\pi}{a}$でブラッグ反射される。その結果，2つの波$\exp\left(i\frac{\pi}{a}x\right)$と$\exp\left(-i\frac{\pi}{a}x\right)$が重畳した2つの定在波$\varphi_+(x)$および$\varphi_-(x)$が形成される。ここで，$\varphi_+(x)$および$\varphi_-(x)$は，

$$\varphi_+(x)=\frac{1}{\sqrt{2a}}\left[\exp\left(i\frac{\pi}{a}x\right)+\exp\left(-i\frac{\pi}{a}x\right)\right]$$

$$\varphi_-(x)=\frac{1}{\sqrt{2a}}\left[\exp\left(i\frac{\pi}{a}x\right)-\exp\left(-i\frac{\pi}{a}x\right)\right]$$

で記述され，$0\le x\le a$の範囲で規格化されている。

(1) $|\varphi_+(x)|^2$および$|\varphi_-(x)|^2$を求めよ。

(2) 形成された2つの定在波$\varphi_+(x)$および$\varphi_-(x)$で記述される2つの状態のエネルギー期待値の差を求めよ。

【第６問】

固体中の1個のイオンの安定位置付近での運動を考える。簡単のため，x方向の運動のみ考えることとし，安定位置を原点（$x=0$）とする。また，イオンが感じるポテンシャル$V(x)$は,

$$V(x)=\frac{1}{2}kx^2$$

で与えられることとする。ここでkは正の定数である。イオンの質量をm，電荷をqとして以下の問いに答えよ。なお，問題文中に与えられている定数や関数は解答中に用いてよい。

I. このイオンの運動を量子力学的に考えると，イオンの全エネルギーEは,

$$E_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega,\ \ \hbar=\frac{h}{2\pi},\ n=0,1,2,\ldots,$$

それぞれのnに対応する波動関数$\psi_n(x)$は,

$$\psi_n(x)=C_nH_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right)\exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right),$$
$$H_0(z)=1,\ H_1(z)=2z,\ H_2(z)=4z^2-2,\ldots,$$

となる。ここでhはプランク定数で，C_nは波動関数の規格化のために導入された定数である。また，ωは正の定数である。

1. 全エネルギーとして許される値が離散的になる理由を50字程度で述べよ。

2. (1) この場合の時間に依存しないシュレディンガー方程式を書け。

(2) $n=0$の状態を考え，与えられた他の定数を用いてωを表せ。解答には導出過程も記すこと。

3. イオンが$n=0$の状態にあるものとする。

(1) イオンをx～$x+dx$の範囲に見出す確率を$P(x)dx$と表そう。この時，$P(x)$を求めよ。

(2) 同じエネルギーを持つ古典力学的な粒子について，$x=\sqrt{\dfrac{2\hbar\omega}{k}}$のときの$P(x)$を求めよ。どのようにその解答に至ったかも記すこと。

(3) 上記の問(1)および問(2)を踏まえ，古典力学と量子力学でイオンの運動範囲がどのように異なるか，50字程度で説明せよ。

II. このイオンの運動が，x方向に一様電場Fを加えた場合にどのように変化するか調べてみよう。

1. この場合の時間に依存しないシュレディンガー方程式を書け。なお，一様電場によりイオンが感じるポテンシャルは$-qFx$と表されるとする。

2. 電場を加えない状態からのイオンの安定位置の変化を求めよ。

3. イオンの全エネルギーとして許される値と，それぞれの値に対応する波動関数を求めよ。

【第７問】

1気圧におけるAl-Cu 2元系状態図（図１）に関する以下の問いに答えよ。

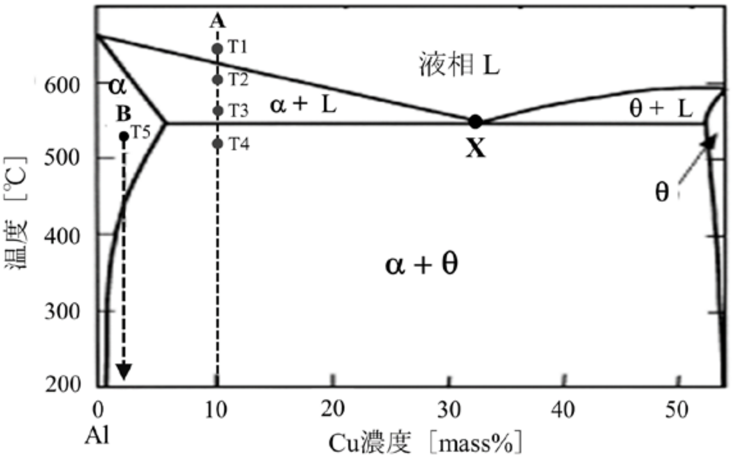

図１

1. X点を含む反応系の名称を答えよ。また，X点の熱力学的な状態をGibbsの相律に基づいて100字程度で簡潔に説明せよ。

2. 組成Aの合金を，液相から連続冷却する過程を考える。
   (1) 過冷却現象を50字程度で説明せよ。
   (2) 冷却中の相形成が，均一核生成−成長によって進行するものとする。核を球体と仮定したときの臨界核半径 r_c を，古典核生成理論に基づき導出せよ。新相形成に伴う単位体積あたりのGibbsエネルギー変化を ΔG_V（< 0），および新相と母相の界面エネルギーを γ とする。
   (3) 温度 T1 の液相を，系の平衡状態を保ちながら冷却したときの温度 T2, T3，T4 における合金の微細組織を模式的に描け。

3. 組成Bの合金を温度 T5 で十分な時間保持した後，急冷することで得たα過飽和固溶体を始点とする合金の組織制御を考える。

(1) α過飽和固溶体には，室温での熱平衡空孔よりも過剰な空孔が含まれる。以下の問いに答えよ。

a) 温度 T における純金属中の熱平衡空孔濃度を求めよ。導出にあたって，金属結晶は N 個の原子サイトを含むとし，一個あたりの形成エンタルピーが Δe_{V} である空孔が n 個形成される場合（$N \gg n$）のGibbsエネルギー変化を考える。空孔は金属結晶中にランダムに形成され，エントロピー S は $k_{\mathrm{B}} \ln W$ （k_{B}: ボルツマン定数，W: 系を構成するミクロ状態の総数）で与えられるとする。途中の計算も記すこと。必要であれば，$\ln X! \sim X \ln X - X$ （$X \gg 1$）の近似を用いよ。

b) α過飽和固溶体では，T5 における全ての熱平衡空孔が室温（25℃）へと凍結されたと考える。室温での熱平衡空孔濃度と，α過飽和固溶体の空孔濃度との比を求めよ。ここで，組成Bの希薄合金は純金属として扱えると仮定し，計算には以下の値を用いよ。

純Alの Δe_{V} = 1.0 eV, T5 = 530℃, $k_{\mathrm{B}} = 8.62 \times 10^{-5}$ eV·K^{-1}。

(2) α過飽和固溶体を（α+θ）2相領域で熱処理すると，熱力学的に準安定なθ’ 相の析出が進行し，θ’ 相を微細かつ高密度に分散した組織とすることで本Al合金の強度が最大となる。そのようなθ’ 相分散組織を得るためのα過飽和固溶体の最適熱処理温度について，核生成頻度，析出相の成長速度の観点から200字程度で述べよ。

【第８問】

1. ある金属Mの酸化反応①を考える。反応①の定圧モル比熱変化ΔC_p [J·mol^{-1}·K^{-1}] が式②で与えられたとき，298 K より高い温度 T [K] におけるこの反応の標準Gibbsエネルギー $\Delta G°$ を求めよ。導出過程も示すこと。ただし，298 K から T までの間に，反応に関与する物質は相変化しないものとする。ここで，a，b は定数とする。また，298 K における反応の標準エンタルピーと標準エントロピーを，それぞれ $\Delta H°_{298}$，$\Delta S°_{298}$ とせよ。括弧内の s および g は基準状態を表し，それぞれ純粋固体，純粋気体（1 atm）であることを示す。

$$M(s) + 1/2\ O_2(g) = MO(s) \qquad ①$$

$$\Delta C_p = a + bT \qquad ②$$

2. 金属（または金属酸化物）－金属酸化物の平衡における酸素ポテンシャル（酸素の相対化学ポテンシャル）と温度との関係を図示したエリンガム図では，ほとんどの平衡線は同じような勾配を有している。その理由を100字程度で記せ。

3. Fe_xO（ウスタイト）とFe_3O_4（マグネタイト）に関して，Fe_xO の共析温度ならびにそれより高い温度において，反応の標準エンタルピー$\Delta H°_T$と標準エントロピー$\Delta S°_T$は温度に依らず一定として表１に示す値が得られたとする。ただし，Fe_xO は不定比化合物である。以下の問いに答えよ。気体定数 R = 8.314 J·mol^{-1}·K^{-1}，気体の標準状態は1 atm（1.013×10^5 Pa）とする。

表１　反応の標準エンタルピーと標準エントロピー

	$\Delta H^{\circ}_{T}[\mathrm{J\cdot mol^{-1}}]$	$\Delta S^{\circ}_{T}[\mathrm{J\cdot mol^{-1}\cdot K^{-1}}]$
$2x\mathrm{Fe}+\mathrm{O_2}=2\mathrm{Fe}_x\mathrm{O}$　（※1）	–522200	–124.7
$c\mathrm{Fe}_x\mathrm{O}+\mathrm{O_2}=d\mathrm{Fe_3O_4}$　（※2）	–609400	–229.4

※1　不定比化合物 $\mathrm{Fe}_x\mathrm{O}$ は，Fe と平衡する時の組成とする。（x = 0.95）

※2　c，d は定数とする。不定比化合物 $\mathrm{Fe}_x\mathrm{O}$ は，$\mathrm{Fe_3O_4}$ と平衡する時の組成とする。（$0.83 \leq x \leq 0.95$）

(1) 800 K から1000 K まで Fe，$\mathrm{Fe}_x\mathrm{O}$，$\mathrm{Fe_3O_4}$ の間での酸化還元反応の標準Gibbsエネルギーと温度の関係を図示せよ。また，各相の安定領域を図中に示せ。ただし，共析温度以下の領域については定性的な図示でよい。

(2) 共析点における平衡酸素分圧[Pa]を有効数字2桁で求めよ。導出過程も示すこと。

(3) 表１では，反応の標準エンタルピーと標準エントロピーは，温度に依存しないことを仮定している。しかし，実際には，それらは温度に依存する。依存する理由の1つを50字程度で記せ。

（計算用紙）

（計算用紙）

（計算用紙）

（計算用紙）