

2020年度

東京大学大学院 工学系研究科  
マテリアル工学専攻  
入学試験問題

マテリアル工学基礎

2019年8月27日(火) 午前9:00 ~ 12:00

受験番号(Examinee No.)

- 注意事項 -

- 1) 試験時間は180分である。
- 2) 問題はマテリアル工学基礎の問題冊子(5問)および化学(マテリアル工学専攻受験者用)の問題冊子(3問)の8問ある。この中から4問を選択して解答すること。5問以上解答した場合は全問無効となる。
- 3) 解答は必ず1問を1枚の解答用紙に記入すること。解答用紙には選択した問題の番号を記入すること。用紙の表面だけで書ききれない場合には、裏面を使用すること。
- 4) 日本語か英語で解答すること。
- 5) 計算には問題冊子の余白などを適宜使用すること。
- 6) 問題冊子にも受験番号を記入すること。
- 7) 問題冊子は持ち帰らないこと。

(計算用紙)

(計算用紙)

(計算用紙)

(計算用紙)

## 【第4問】

図1のように、車体と車輪とサスペンションからなる車が波打った路面を走行している。このとき、水平方向 ( $x$ 方向) の速度  $v$  は一定とする。車の車体は質量  $m$  の質点とし、質量のない車輪と質量のないサスペンションにより支えられ、上下方向 ( $y$ 方向) にのみ振動している。サスペンションは、ばね定数  $k$  と減衰係数  $c$  をもつ。ただし、静止状態における車体の路面からの高さは  $h_0$  である。路面は正弦波状であり、その高さを  $a \sin(2\pi x/l)$  とする。また、車輪は路面から離れないものとし、大きさは無視できるとする。

始めに、減衰係数  $c$  が十分に小さい場合を考える。

1. 減衰係数  $c$  が無視できるとし、車体の鉛直方向の位置  $y(t)$  に関する運動方程式を  $m, k, a, h_0, t, \omega = 2\pi v/l$  を使って示せ。ここで、 $t$  は経過時間である。
2. 問1の運動方程式で記述される車体の自由振動の固有振動数を式で示せ。
3. 走行開始後、十分に時間を経て定常振動状態になったとき、問1の方程式の解を  $m, k, a, h_0, t, \omega$  を使って示せ。このとき、わずかの減衰により車体の自由振動は収まったと考える。ここで、任意の変数  $A$  を用いて、車体の上下方向の動きを  $y(t) = A \sin \omega t + h_0$  とおいてみるとよい。
4. 車が共振状態になる速度を式で示し、その具体的な値を有効数字2桁で求めよ。ここで、各パラメータの値は以下とする。

$$m = 200 \text{ kg}, k = 4000 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-2}, a = 40 \text{ mm}, l = 8.0 \text{ m}, v = 50 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$$

次に、減衰係数  $c$  が無視できない場合を考える。

5. 車体の鉛直方向の位置  $y(t)$  に関する運動方程式を  $m, k, a, c, h_0, t, \omega$  を使って示せ。
6. 走行開始後、十分に時間を経て定常振動状態になったとき、問5の方程式の

解を  $m, k, a, c, h_0, t, \omega$  を使って示せ。ここで、任意の変数  $\delta, A, B_1, B_2$  を用いて、上下方向の動きを  $y(t) = B_1 \sin \omega t + B_2 \cos \omega t + h_0$  とおき、 $B_1, B_2$  を求めてから、 $y(t) = A \sin(\omega t - \delta) + h_0$  の形で示すとよい。

7. 問6の状態の車体の上下方向の振動の振幅は、路面の振幅  $a$  の何倍になるか式で示し、具体的な値を有効数字2桁で求めよ。また、この振動の振幅は、問3の場合の振動の振幅に対し何倍になるか有効数字2桁で求めよ。ここで、各パラメータの値は以下とする。

$$m = 200 \text{ kg}, \quad k = 4000 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-2}, \quad a = 40 \text{ mm}, \quad l = 8.0 \text{ m}, \quad v = 50 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1},$$

$$c = 4.0 \text{ MN} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$$

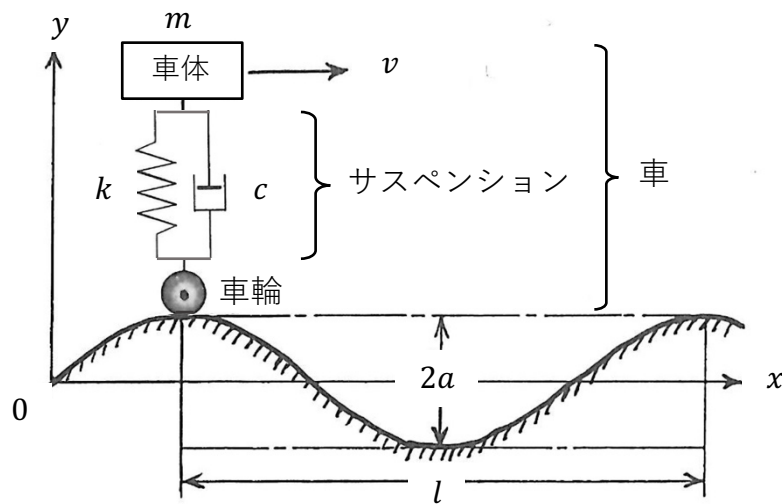


図1

## 【第5問】

図1のように、 $x$ 軸に垂直に間隔  $d$  で配置された2枚の完全導体からなる平行平板電極の間に、誘電率  $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$  ( $\varepsilon_r$  は比誘電率,  $\varepsilon_0$  は真空の誘電率) の誘電体をはさまれた $z$ 方向へ無限に長い伝送線路中を、 $z$ 方向へ伝搬する交流電流の振る舞いを考えよう。電極は $y$ 方向に十分に広く端の効果は無視できるとし、 $z$ 方向に伝搬する電流は  $y$  によらないとする。電場ベクトル  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ , 磁束密度ベクトル  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  はいずれも両電極間にのみ存在し、それらの $z$ 成分はいずれも0とみなせるものとする。ここで、 $\mathbf{r}$  は位置ベクトル,  $t$  は時間である。電極を $z$ 軸方向に伝搬する電流 ( $y$ 方向の単位長さあたり) は、 $x = 0$ に置かれた電極1で  $\mathbf{I}_1(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}_z I_0 \cos(kz - \omega t)$ ,  $x = d$ に置かれた電極2で  $\mathbf{I}_2(\mathbf{r}, t) = -\mathbf{e}_z I_0 \cos(kz - \omega t)$  と与えられると仮定しよう。ここで、 $\mathbf{e}_z$  は $z$ 方向の単位ベクトル,  $k$  は波数ベクトルの大きさ,  $\omega$  は角振動数である。ここでの電磁場は以下のマクスウェル方程式

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \quad (1a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1c)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{i} + \varepsilon \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1d)$$

に従う。ここで、 $\rho$  は電荷密度,  $\mathbf{i}$  は電流密度,  $\mu_0$  は真空の透磁率である。

1. マクスウェル方程式とベクトル恒等式  $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$  ( $\mathbf{A}$  は任意のベクトル) を用いて以下の式(2)が成り立つことを示せ。

$$\nabla \cdot \mathbf{i} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (2)$$



また、式(2)の積分形を示したうえで、その物理的な意味を50字程度で説明せよ。

2. 式(2)を用いて電極1上の電荷面密度  $\sigma_1(z, t)$  および電極2上の電荷面密度  $\sigma_2(z, t)$  を求めよ。
3. マクスウェル方程式(1a)と(1d)を用いて、 $0 < x < d$  における電場ベクトル  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  と磁束密度ベクトル  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  を求めよ。
4. 問3で得られた  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  と  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  に式(1c)を適用することによって、 $k$  と  $\omega$  の関係を導出せよ。この伝送線を伝搬する交流電流の速度を求め、真空中の光速と比較せよ。その物理的な意味を50字程度で説明せよ。

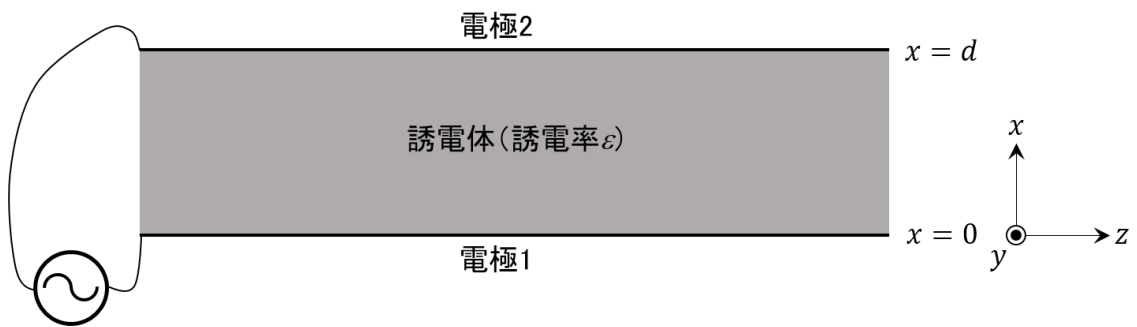


図 1

## 【第6問】

1. 以下の式(1)で与えられる1次元のシュレーディンガー方程式に従い、 $x$ 方向のみに運動できる、エネルギー  $E_0$ 、質量  $m$  の粒子を考える。

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right) \varphi(x) = E_0 \varphi(x) \quad (1)$$

ここで、 $\varphi(x)$  は粒子の波動関数、 $V(x)$  はポテンシャル、 $\hbar = h/2\pi$  ( $h$ はプランク定数) である。以下の式(2)で表される図1に示すような1次元階段型ポテンシャルに向かって左から粒子が入射する。

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ V_0 & (x > 0) \end{cases} \quad (2)$$

ここで、 $V_0 > 0$  である。

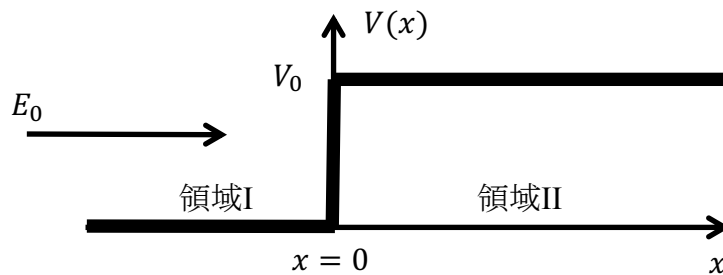


図1

領域 I ( $x \leq 0$ ) における粒子の波動関数  $\varphi_I$  は、以下の式(3)のように書くことができる。

$$\varphi_I = A \exp(ikx) + B \exp(-ikx) \quad (3)$$

ここで、式(3)の右辺の第1項と第2項はそれぞれ粒子の入射と反射を表して

おり、 $k = \sqrt{\frac{2mE_0}{\hbar^2}}$ 、 $i$  は虚数単位である。以下の問いに答えよ。

- (1) 粒子のエネルギーが  $E_0 > V_0$  の場合、 $x = 0$  のポテンシャル障壁では粒子の反射と透過が起きる。領域 II ( $x > 0$ ) における粒子の波動関数が  $\varphi_{II} = C_1 \exp(ik_1x)$  のように表せるとする。このとき、 $k_1$  を  $m, \hbar, E_0, V_0$  を用いて表せ。
- (2) 問 1(1)の粒子の反射率  $R = |B|^2/|A|^2$  と透過率  $T = 1 - R$  を  $E_0$  及び  $V_0$  を用いて表せ。
- (3)  $E_0 < V_0$  の粒子を入射した場合、領域 II ( $x > 0$ ) における粒子の波動関数は  $\varphi_{II} = C_2 \exp(-k_2x)$  のように表せるとする。この時の反射率  $R$  を求めよ。導出過程も示すこと。

2. 次に、金属表面に垂直に一様な電界強度  $F$  ( $F > 0$ ) の電界を印加して放出される電子の挙動を、図 2 のような単純な 1 次元の三角ポテンシャル近似を用いて検討する。三角ポテンシャルは

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ V_0 - eFx & (x > 0) \end{cases} \quad (4)$$

で表され、 $x \leq 0$  は金属、 $x > 0$  は真空に対応する。ここで、 $V_0 > 0$  ,  $e$  は電気素量である。 $x$  方向のみに運動できるエネルギー  $E_0$  , 質量  $m$  の粒子が左から入射する。

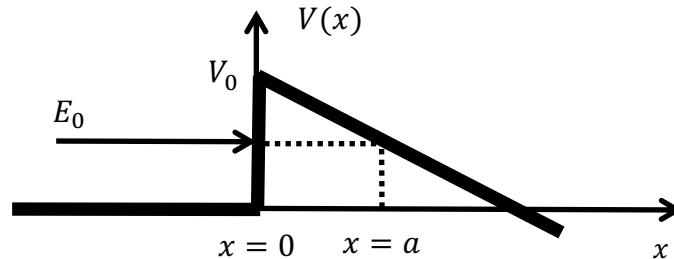


図 2

$E_0 < V_0$  の場合、 $V(a) = E_0$  となる  $a$  の位置での透過率  $T_a$  は以下のように

与えられるとする。

$$T_a = \exp \left[ -2 \int_0^a \sqrt{\frac{2m[V(x) - E_0]}{\hbar^2}} dx \right] \quad (5)$$

以下の問いに答えよ。

(1) 粒子の透過率  $T_a$  は  $W(=V_0 - E_0)$  と  $m, \hbar, e, F$  を用いて,

$$T_a = \exp \left[ -\frac{4\sqrt{2m}}{3\hbar eF} W^{3/2} \right] \quad (6)$$

となることを示せ。

(2)  $E_0$  を金属のフェルミエネルギーとすると、問 2(1)の  $W$  は仕事関数に対応する。ここで、仕事関数が 4.45 eV のタングステン表面に電界  $F$  を印加して、電子を取り出す実験を考える。式(6)をもとに、透過率  $T_a$  を  $6.74 \times 10^{-3}$  とするための電界  $F$  を求めよ。また、その際の  $a$  を求めよ。有効数字 3 桁で解答せよ。ただし、電気素量  $e = 1.60 \times 10^{-19}$  C,  $\hbar = 1.05 \times 10^{-34}$  J·s, 電子の質量  $m = 9.11 \times 10^{-31}$  kg とする。また、 $\ln(6.74 \times 10^{-3}) = -5.00$  としてよい。

(3) 問 2(2)のように粒子がポテンシャル障壁を通り抜ける現象をトンネル効果という。トンネル効果が応用されている装置あるいはデバイスを一つ挙げ、その動作原理を 50 字程度で説明せよ。



## 【第7問】

ある温度  $T$  において、母相 $\beta$ の2つの結晶粒（粒1と粒2）がつくる粒界上で $\alpha$ 相の不均一核生成が生じる過程を考える（図1）。 $\alpha$ 相の核はレンズ形状の立体であり、この立体は図2の半径  $r$  の球の一部を2つ組み合わせて近似される。レンズ状の立体の表面と粒界がなす角の補角を  $\theta$  ( $0 < \theta \leq 90^\circ$ ) とする。温度  $T$  における $\alpha$ 相と $\beta$ 相の単位体積当たりの自由エネルギー差を  $\Delta G_V(T)$  ( $= G_\alpha(T) - G_\beta(T)$ ) として、以下の問いに答えよ。

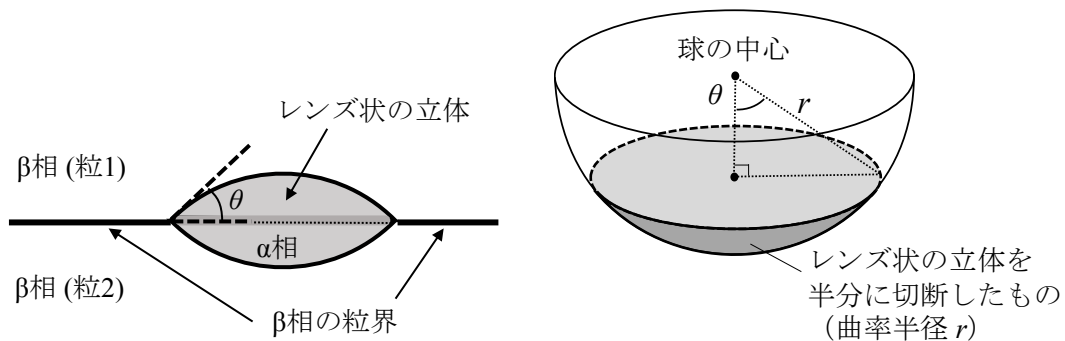


図1

図2

1.  $\alpha$ 相と $\beta$ 相の界面エネルギー（単位面積当たり）を  $\sigma_{\alpha\beta}$ 、 $\beta$ 相の間の粒界エネルギー（単位面積当たり）を  $\sigma_{\beta\beta}$  とするとき、図1において  $\sigma_{\alpha\beta}$ 、 $\sigma_{\beta\beta}$  と  $\theta$  の満たすべき関係式を示せ。ただし、 $\sigma_{\alpha\beta}$ 、 $\sigma_{\beta\beta}$  の異方性は無視できるものとする。
2. 図1のように $\alpha$ 相の結晶核が生成するときの全自由エネルギー変化  $\Delta E$  が以下の式(1)で表されることを示せ。ただし、簡単のため図1の $\alpha$ 相の表面積および体積をそれぞれ  $S$ 、 $V$  と表し、 $\alpha$ 相の核生成に伴う歪みエネルギーは無視できるものとする。

$$\Delta E = V\Delta G_V(T) + S\sigma_{\alpha\beta} - \pi r^2 \sigma_{\beta\beta} \sin^2 \theta \quad (1)$$

3. 曲率半径  $r$  がある大きさ  $r^*$  (臨界核の曲率半径) 以上になると  $\alpha$  相の核は安定に成長する。その理由を、式(1)に基づいて70字程度で説明せよ。ここで、 $S$ ,  $V$  はそれぞれ以下の式(2)と式(3)で与えられる。

$$S = 4\pi r^2(1 - \cos\theta) \quad (2)$$

$$V = 2\pi r^3(2 + \cos\theta)(1 - \cos\theta)^2/3 \quad (3)$$

4.  $\alpha$  相の臨界核の曲率半径  $r^*$  が  $\theta$  に依らないことを示せ。
5.  $\alpha$  相の臨界核の生成エネルギーを  $\Delta G_V(T)$ ,  $\sigma_{\alpha\beta}$ ,  $\theta$  を用いて表せ。
6.  $\alpha$  相の核生成速度は「臨界核の数密度」と「臨界核に原子が付着する頻度」の2つの因子の積に比例する。これらの両因子の温度依存性に留意して、 $\alpha$  相の不均一核生成速度の温度依存性のグラフの概形を、 $\beta \rightarrow \alpha$  変態点  $T_0$  から  $T_0$  よりも十分低い温度までの温度範囲について図示せよ。ただし、図中に  $T_0$  を明示すること。

## 【第8問】

1. 銅 (Cu) と鉄 (Fe) との二元系合金を考える。状態図を模式的に図1に示す。1273 K におけるCu中のFeの溶解度は 2.5 at%, Fe ( $\gamma$ 相) 中のCuの溶解度は 3.5 at%である。以下の問いに答えよ。各設問に対して導出過程も示すこと。気体定数  $R$  は  $8.314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  を用いよ。有効数字3桁で解答せよ。

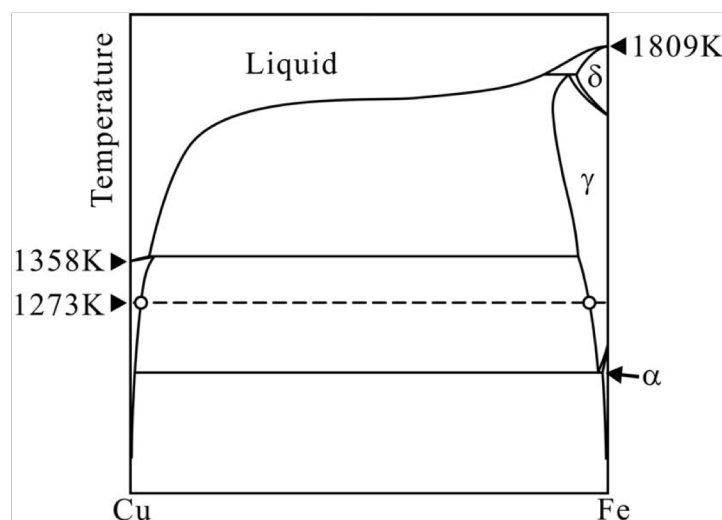
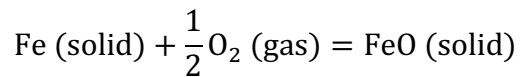


図1

- (1) 二元系希薄溶体では、溶質成分 1 の蒸気圧  $p_1$  がそのモル分率  $x_1$  に比例すると考えられる。すなわち  $p_1 = kx_1$  (ただし  $k$  は定数) と書ける。この希薄溶体では、溶媒成分 2 の蒸気圧  $p_2$  はそのモル分率  $x_2$  に正比例する。すなわち  $p_2 = x_2 p_2^0$  (ただし  $p_2^0$  は純粋な成分 2 の蒸気圧) と書ける。これらの溶質成分 1 および溶媒成分 2 の蒸気圧に関する近似式を利用して、1273 Kにおける Cu-Fe 二元系合金中の Fe の活量を、Fe のモル分率に対して模式的に描け。
- (2) 1273 Kにおける、1 at%の Fe を含む Cu-Fe 二元系合金中の Fe の活量を求めよ。



- (3) 1 at% の Fe を含む Cu-Fe 二元系合金中の Fe が, 1273 K で酸化して FeO になる下限の酸素分圧を求めよ。下記の温度  $T$  における酸化反応の標準自由エネルギー変化  $\Delta G^\circ$  を用いること。ただし, FeO 以外の Fe および Cu の酸化物の生成は無視できるものとする。



$$\Delta G^\circ = -264889 + 58.79 T \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1}$$

2. ガソリンエンジンは主にピストンとシリンダーから構成され, シリンダー内の気体の圧縮, 燃焼, 膨張, 冷却を繰り返してピストンを動かしている。図2に示すような単純化された熱力学サイクル (オットーサイクル) が, 一般にガソリンエンジンのモデルと考えられている。理想気体を作業物質としてシリンダーに導入, 排出する理想的な熱力学サイクルを考える。この系で次のような準静的プロセスを行う。

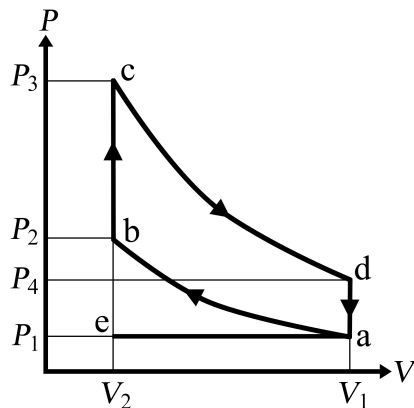


図2

- (i) プロセス e→a: 一定温度  $T_a$ , 一定圧力  $P_1$  で体積  $V_1$  までシリンダー内に作業物質が導入される。
- (ii) プロセス a→b: 温度  $T_b$ , 体積  $V_2$ , 圧力  $P_2$  まで断熱的に圧縮する。

- (iii) プロセス  $b \rightarrow c$ : 作業物質に熱が与えられ, 温度と圧力はそれぞれ  $T_c$ ,  $P_3$  まで短時間のうちに一定体積で上昇する。
- (iv) プロセス  $c \rightarrow d$ : 体積  $V_1$  まで断熱的に膨張し, 温度と圧力はそれぞれ  $T_d$ ,  $P_4$  まで減少する。
- (v) プロセス  $d \rightarrow a$ : 一定体積で外部へ熱が逃げ, 温度と圧力はそれぞれ  $T_a$ ,  $P_1$  まで減少する。
- (vi) プロセス  $a \rightarrow e$ : 温度, 圧力一定でシリンダーから作業物質が外部に排出される。

以下の問いに答えよ。各設問に対して導出過程も示すこと。

- (1)  $n$  モルの理想気体において, 次式(1)が成り立つことを示せ。

$$C_p = C_v + nR \quad (1)$$

ただし,  $C_p$  は定圧熱容量,  $C_v$  は定積熱容量,  $R$  は気体定数である。

- (2) 理想気体の準静的断熱過程において, 次式(2)を導出せよ。

$$PV^\gamma = \text{一定} \quad (2)$$

ただし,  $P$  と  $V$  はそれぞれ圧力と体積, また  $\gamma = C_p/C_v$  とする。導出には式(1)を用いてよい。

- (3) 上記熱力学サイクルにおいて,  $b \rightarrow c$ のプロセスで作業物質に与えられる熱  $Q_1$  を  $T_b$ ,  $T_c$  および  $C_v$  を用いて表せ。また,  $d \rightarrow a$ のプロセスで外部へ放出される熱  $Q_2$  を  $T_a$ ,  $T_d$  および  $C_v$  を用いて表せ。

- (4) この熱力学サイクルの熱効率  $\eta$  を  $T_a$  と  $T_b$  の関数として求めよ。式(1), 式(2)を用いてよい。ただし, 熱効率は1サイクルで熱力学サイクルが行う仕事を, 1サイクルで作業物質に与えられる熱量で割ったものである。なお, プロセス  $e \rightarrow a$ ,  $a \rightarrow e$ は熱効率には寄与しないことに留意せよ。

- (5) 問2(4)で求めた  $\eta$  の式に基づいて, この熱力学サイクルの熱効率を上げるために, シリンダーおよびピストンを構成する材料として望ましい特性を一つ挙げ, 30字程度で理由と共に述べよ。

