２０２０年度

東京大学大学院　工学系研究科
マテリアル工学専攻
入学試験問題

マテリアル工学基礎

2019 年 8 月 27 日（火）　 午前 9:00 ～ 12:00

受験番号(Examinee No.)					

－ 注意事項 －

1) 試験時間は 180 分である。
2) 問題はマテリアル工学基礎の問題冊子（5 問）および化学（マテリアル工学専攻受験者用）の問題冊子（3 問）の 8 問ある。この中から 4 問を選択して解答すること。5 問以上解答した場合は全問無効となる。
3) 解答は必ず 1 問を 1 枚の解答用紙に記入すること。解答用紙には選択した問題の番号を記入すること。用紙の表面だけで書ききれない場合には，裏面を使用すること。
4) 日本語か英語で解答すること。
5) 計算には問題冊子の余白などを適宜使用すること。
6) 問題冊子にも受験番号を記入すること。
7) 問題冊子は持ち帰らないこと。

（計算用紙）

（計算用紙）

（計算用紙）

（計算用紙）

【第４問】

図1のように，車体と車輪とサスペンションからなる車が波打った路面を走行している。このとき，水平方向（x方向）の速度 v は一定とする。車の車体は質量 m の質点とし, 質量のない車輪と質量のないサスペンションにより支えられ, 上下方向（y方向）にのみ振動している。サスペンションは，ばね定数 k と減衰係数 c をもつ。ただし，静止状態における車体の路面からの高さは h_0 である。路面は正弦波状であり，その高さを $a\sin(2\pi x/l)$ とする。また，車輪は路面から離れないものとし，大きさは無視できるとする。

始めに，減衰係数 c が十分に小さい場合を考える。

1. 減衰係数 c が無視できるとし，車体の鉛直方向の位置 $y(t)$ に関する運動方程式を m，k，a，h_0，t，$\omega = 2\pi v/l$ を使って示せ。ここで，t は経過時間である。
2. 問 1 の運動方程式で記述される車体の自由振動の固有振動数を式で示せ。
3. 走行開始後，十分に時間を経て定常振動状態になったとき，問 1 の方程式の解を m，k，a，h_0，t，ω を使って示せ。このとき，わずかの減衰により車体の自由振動は収まったと考える。ここで，任意の変数 A を用いて，車体の上下方向の動きを $y(t) = A\sin\omega t + h_0$ とおいてみるとよい。
4. 車が共振状態になる速度を式で示し，その具体的な値を有効数字 2 桁で求めよ。ここで，各パラメータの値は以下とする。
   $m = 200\ \mathrm{kg}$，$k = 4000\ \mathrm{kg\cdot s^{-2}}$，$a = 40\ \mathrm{mm}$，$l = 8.0\ \mathrm{m}$，$v = 50\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$

次に，減衰係数 c が無視できない場合を考える。

5. 車体の鉛直方向の位置 $y(t)$ に関する運動方程式を m，k，a，c，h_0，t，ω を使って示せ。
6. 走行開始後，十分に時間を経て定常振動状態になったとき，問 5 の方程式の

解を m，k，a，c，h_0，t，ω を使って示せ。ここで，任意の変数 δ，A，B_1，B_2 を用いて，上下方向の動きを $y(t) = B_1 \sin \omega t + B_2 \cos \omega t + h_0$ とおき，B_1，B_2 を求めてから，$y(t) = A \sin(\omega t - \delta) + h_0$ の形で示すとよい。

7. 問 6 の状態の車体の上下方向の振動の振幅は，路面の振幅 a の何倍になるか式で示し，具体的な値を有効数字 2 桁で求めよ。また，この振動の振幅は，問 3 の場合の振動の振幅に対し何倍になるか有効数字 2 桁で求めよ。ここで，各パラメータの値は以下とする。

$m = 200$ kg，$k = 4000$ kg・s^{-2}，$a = 40$ mm，$l = 8.0$ m，$v = 50$ km・h^{-1}，$c = 4.0$ MN・s・m^{-1}

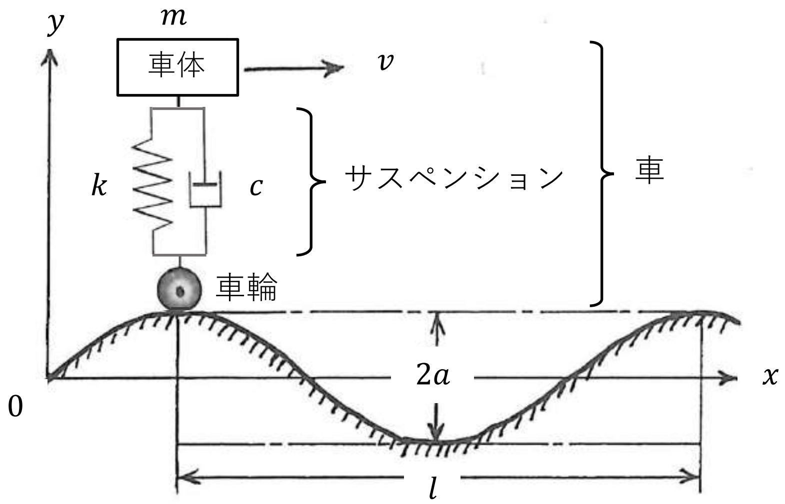

図1

【第５問】

図1のように，x軸に垂直に間隔 d で配置された2枚の完全導体からなる平行平板電極の間に，誘電率 $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$（ ε_r は比誘電率，ε_0 は真空の誘電率）の誘電体がはさまれたz方向へ無限に長い伝送線路中を，z方向へ伝搬する交流電流の振る舞いを考えよう。電極はy方向に十分に広く端の効果は無視できるとし，z方向に伝搬する電流は y によらないとする。電場ベクトル $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$，磁束密度ベクトル $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$ はいずれも両電極間にのみ存在し，それらのz成分はいずれも0とみなせるものとする。ここで，$\boldsymbol{r}$ は位置ベクトル，t は時間である。電極をz軸方向に伝搬する電流（y方向の単位長さあたり）は，$x=0$に置かれた電極1で $\boldsymbol{I}_1(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{e}_z I_0 \cos(kz-\omega t)$，$x=d$に置かれた電極2で $\boldsymbol{I}_2(\boldsymbol{r},t) = -\boldsymbol{e}_z I_0 \cos(kz-\omega t)$ と与えられると仮定しよう。ここで，$\boldsymbol{e}_z$ はz方向の単位ベクトル，k は波数ベクトルの大きさ，ω は角振動数である。ここでの電磁場は以下のマクスウェル方程式

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \tag{1a}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{1b}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{1c}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{i} + \varepsilon \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{1d}$$

に従う。ここで，ρ は電荷密度，$\boldsymbol{i}$ は電流密度，μ_0 は真空の透磁率である。

1. マクスウェル方程式とベクトル恒等式 $\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}) = 0$（$\boldsymbol{A}$ は任意のベクトル）を用いて以下の式(2)が成り立つことを示せ。

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{i} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{2}$$

また，式(2)の積分形を示したうえで，その物理的な意味を50字程度で説明せよ。

2. 式(2)を用いて電極1上の電荷面密度 $\sigma_1(z,t)$ および電極2上の電荷面密度 $\sigma_2(z,t)$ を求めよ。

3. マクスウェル方程式(1a)と(1d)を用いて，$0 < x < d$ における電場ベクトル $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ と磁束密度ベクトル $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$ を求めよ。

4. 問3で得られた $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ と $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$ に式(1c)を適用することによって，k と ω の関係を導出せよ。この伝送線路を伝搬する交流電流の速度を求め，真空中の光速と比較せよ。その物理的な意味を50字程度で説明せよ。

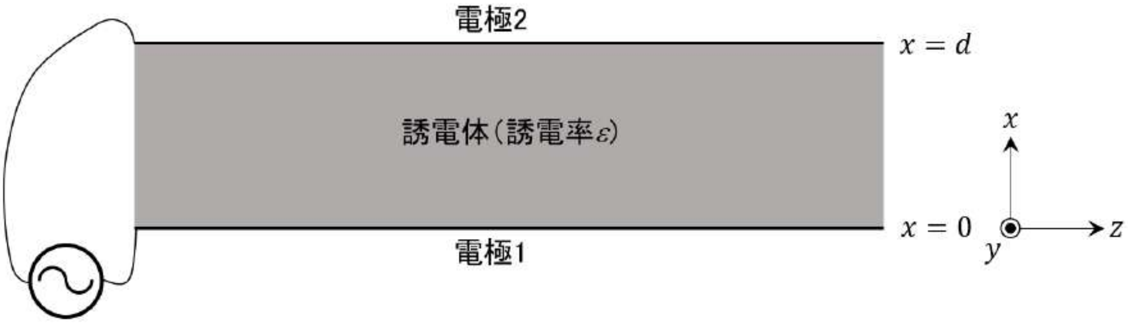

図 1

【第６問】

1. 以下の式(1)で与えられる1次元のシュレーディンガー方程式に従い，x方向のみに運動できる，エネルギー E_0，質量 m の粒子を考える。

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+V(x)\right)\varphi(x)=E_0\varphi(x) \tag{1}$$

ここで，$\varphi(x)$ は粒子の波動関数，$V(x)$ はポテンシャル，$\hbar=h/2\pi$（hはプランク定数）である。以下の式(2)で表される図1に示すような１次元階段型ポテンシャルに向かって左から粒子が入射する。

$$V(x)=\begin{cases}0 & (x\leq 0)\\ V_0 & (x>0)\end{cases} \tag{2}$$

ここで， $V_0>0$ である。

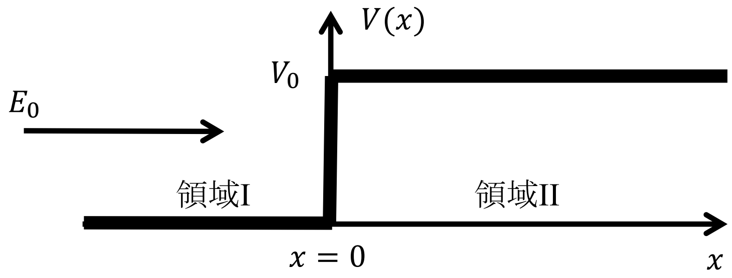

図１

領域Ｉ（$x\leq 0$）における粒子の波動関数 φ_{I} は，以下の式(3)のように書くことができる。

$$\varphi_{\mathrm{I}}=A\exp(ikx)+B\exp(-ikx) \tag{3}$$

ここで，式(3)の右辺の第１項と第２項はそれぞれ粒子の入射と反射を表しており，$k=\sqrt{\frac{2mE_0}{\hbar^2}}$， i は虚数単位である。以下の問いに答えよ。

(1) 粒子のエネルギーが $E_0 > V_0$ の場合，$x = 0$ のポテンシャル障壁では粒子の反射と透過が起きる。領域 II（$x > 0$）における粒子の波動関数が $\varphi_{\mathrm{II}} = C_1 \exp(ik_1 x)$ のように表せるとする。このとき，k_1 を m，$\hbar$，E_0，V_0を用いて表せ。

(2) 問 1(1)の粒子の反射率 $R = |B|^2/|A|^2$ と透過率 $T = 1 - R$ を E_0 及び V_0 を用いて表せ。

(3) $E_0 < V_0$ の粒子を入射した場合，領域 II（$x > 0$）における粒子の波動関数は $\varphi_{\mathrm{II}} = C_2 \exp(-k_2 x)$ のように表せるとする。この時の反射率 R を求めよ。導出過程も示すこと。

2. 次に，金属表面に垂直に一様な電界強度 $F\ (F > 0)$ の電界を印加して放出される電子の挙動を，図 2 のような単純な 1 次元の三角ポテンシャル近似を用いて検討する。三角ポテンシャルは

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ V_0 - eFx & (x > 0) \end{cases} \tag{4}$$

で表され，$x \leq 0$ は金属，$x > 0$ は真空に対応する。ここで，$V_0 > 0$，e は電気素量である。x方向のみに運動できるエネルギー E_0，質量 m の粒子が左から入射する。

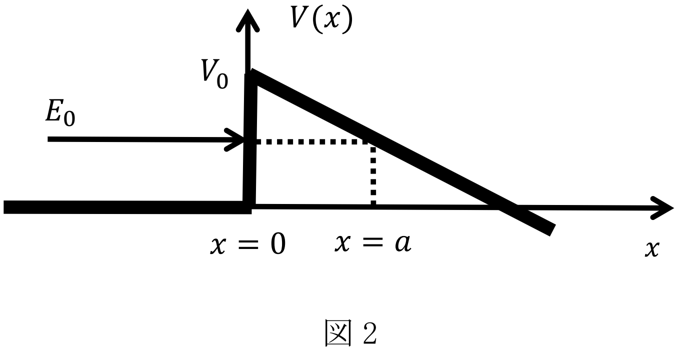

図 2

$E_0 < V_0$ の場合，$V(a) = E_0$ となる a の位置での透過率 T_a は以下のように

与えられるとする。

$$T_a = \exp\left[-2\int_0^a \sqrt{\frac{2m[V(x)-E_0]}{\hbar^2}}\,dx\right] \tag{5}$$

以下の問いに答えよ。

(1) 粒子の透過率 T_a は $W(=V_0-E_0)$ と m，$\hbar$，e，F を用いて，

$$T_a = \exp\left[-\frac{4\sqrt{2m}}{3\hbar eF}W^{3/2}\right] \tag{6}$$

となることを示せ。

(2) E_0 を金属のフェルミエネルギーとすると，問 2(1)の W は仕事関数に対応する。ここで，仕事関数が 4.45 eV のタングステン表面に電界 F を印加して，電子を取り出す実験を考える。式(6)をもとに，透過率 T_a を 6.74×10^{-3} とするための電界 F を求めよ。また，その際の a を求めよ。有効数字 3 桁で解答せよ。ただし，電気素量 $e=1.60\times10^{-19}$ C，$\hbar=1.05\times10^{-34}$ J·s，電子の質量 $m=9.11\times10^{-31}$ kg とする。また，$\ln(6.74\times10^{-3})=-5.00$ としてよい。

(3) 問 2(2)のように粒子がポテンシャル障壁を通り抜ける現象をトンネル効果という。トンネル効果が応用されている装置あるいはデバイスを一つ挙げ，その動作原理を 50 字程度で説明せよ。

【第 7 問】

ある温度 T において，母相βの2つの結晶粒（粒1と粒2）がつくる粒界上でα相の不均一核生成が生じる過程を考える（図1）。α相の核はレンズ形状の立体であり，この立体は図2の半径 r の球の一部を2つ組み合わせて近似される。レンズ状の立体の表面と粒界がなす角の補角を θ $(0 < \theta \leq 90°)$ とする。温度 T における α相とβ相の単位体積当たりの自由エネルギー差を $\Delta G_{\mathrm{V}}(T)$ $\left(= G_{\alpha}(T) - G_{\beta}(T)\right)$ として，以下の問いに答えよ。

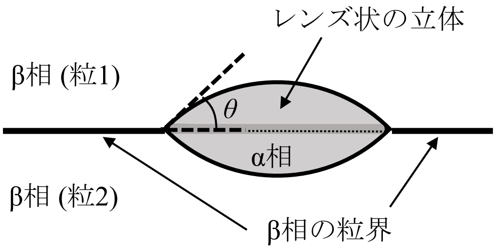

図 1

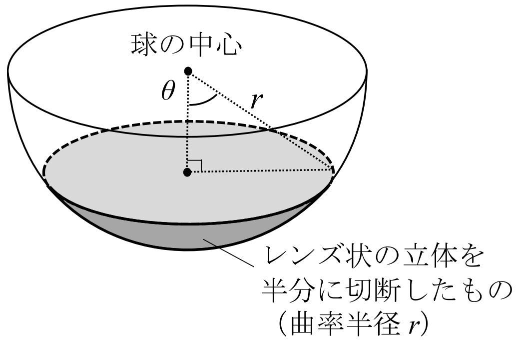

図 2

1. α相とβ相の界面エネルギー（単位面積当たり）を $\sigma_{\alpha\beta}$，β相の間の粒界エネルギー（単位面積当たり）を $\sigma_{\beta\beta}$ とするとき，図1において $\sigma_{\alpha\beta}$，$\sigma_{\beta\beta}$ と θ の満たすべき関係式を示せ。ただし，$\sigma_{\alpha\beta}$，$\sigma_{\beta\beta}$ の異方性は無視できるものとする。

2. 図1のようにα相の結晶核が生成するときの全自由エネルギー変化 ΔE が以下の式(1)で表されることを示せ。ただし，簡単のため図1のα相の表面積および体積をそれぞれ S, V と表し，α相の核生成に伴う歪みエネルギーは無視できるものとする。

$$\Delta E = V\Delta G_{\mathrm{V}}(T) + S\sigma_{\alpha\beta} - \pi r^2 \sigma_{\beta\beta} \sin^2\theta \qquad (1)$$

3. 曲率半径 r がある大きさ r^*（臨界核の曲率半径）以上になるとα相の核は安定に成長する。その理由を，式(1)に基づいて70字程度で説明せよ。ここで，S，V はそれぞれ以下の式(2)と式(3)で与えられる。

$$S = 4\pi r^2(1 - \cos\theta) \tag{2}$$

$$V = 2\pi r^3(2 + \cos\theta)(1 - \cos\theta)^2/3 \tag{3}$$

4. α相の臨界核の曲率半径 r^* が θ に依らないことを示せ。

5. α相の臨界核の生成エネルギーを $\Delta G_{\mathrm{V}}(T)$，$\sigma_{\alpha\beta}$，θ を用いて表せ。

6. α相の核生成速度は「臨界核の数密度」と「臨界核に原子が付着する頻度」の2つの因子の積に比例する。これらの両因子の温度依存性に留意して，α相の不均一核生成速度の温度依存性のグラフの概形を，β → α変態点 T_0 から T_0 よりも十分低い温度までの温度範囲について図示せよ。ただし，図中に T_0 を明示すること。

【第 8 問】

1. 銅（Cu）と鉄（Fe）との二元系合金を考える。状態図を模式的に図1に示す。1273 K における Cu 中の Fe の溶解度は 2.5 at%，Fe（γ相）中の Cu の溶解度は 3.5 at%である。以下の問いに答えよ。各設問に対して導出過程も示すこと。気体定数 R は $8.314\ \mathrm{J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}}$ を用いよ。有効数字3桁で解答せよ。

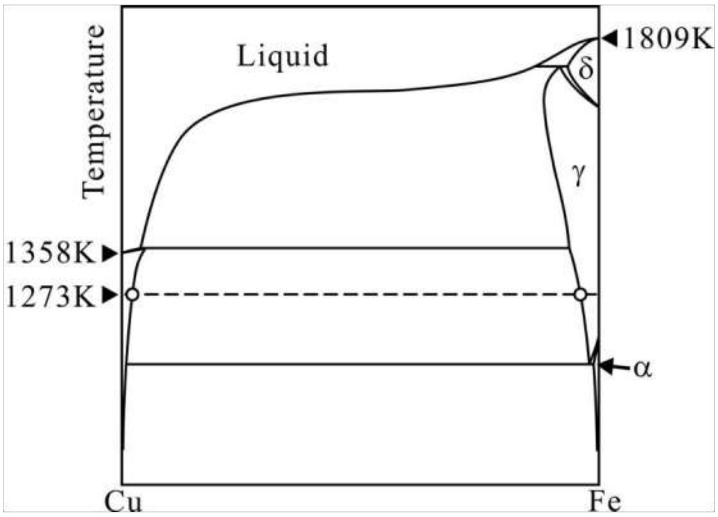

図1

（1）二元系希薄溶体では，溶質成分 1 の蒸気圧 p_1 がそのモル分率 x_1 に比例すると考えられる。すなわち $p_1 = kx_1$ （ただし k は定数）と書ける。この希薄溶体では，溶媒成分 2 の蒸気圧 p_2 はそのモル分率 x_2 に正比例する。すなわち $p_2 = x_2 p_2^{\mathrm{o}}$ （ただし p_2^{o} は純粋な成分 2 の蒸気圧）と書ける。これらの溶質成分 1 および溶媒成分 2 の蒸気圧に関する近似式を利用して，1273 K における Cu-Fe 二元系合金中の Fe の活量を，Fe のモル分率に対して模式的に描け。

（2）1273 K における，1 at%の Fe を含む Cu-Fe 二元系合金中の Fe の活量を求めよ。

(3) 1 at% の Fe を含む Cu-Fe 二元系合金中の Fe が，1273 Kで酸化して FeO になる下限の酸素分圧を求めよ。下記の温度 T における酸化反応の標準自由エネルギー変化 ΔG^{o} を用いること。ただし，FeO 以外の Fe および Cu の酸化物の生成は無視できるものとする。

$$\mathrm{Fe\ (solid)} + \frac{1}{2}\mathrm{O_2\ (gas)} = \mathrm{FeO\ (solid)}$$

$$\Delta G^{\mathrm{o}} = -264889 + 58.79\,T\ \ \mathrm{J \cdot mol^{-1}}$$

2. ガソリンエンジンは主にピストンとシリンダーから構成され，シリンダー内の気体の圧縮，燃焼，膨張，冷却を繰り返してピストンを動かしている。図2に示すような単純化された熱力学サイクル（オットーサイクル）が，一般にガソリンエンジンのモデルと考えられている。理想気体を作業物質としてシリンダーに導入，排出する理想的な熱力学サイクルを考える。この系で次のような準静的プロセスを行う。

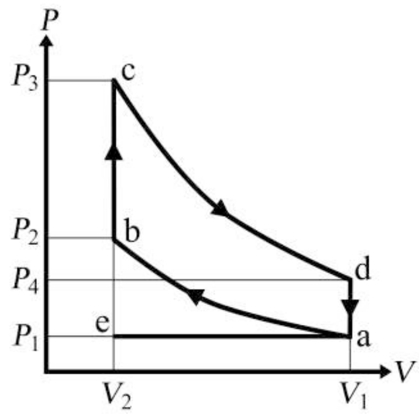

図2

(i) プロセス e→a : 一定温度 T_{a}，一定圧力 P_1 で体積 V_1 までシリンダー内に作業物質が導入される。

(ii) プロセス a→b : 温度 T_{b}，体積 V_2，圧力 P_2 まで断熱的に圧縮する。

(iii) プロセス b→c : 作業物質に熱が与えられ，温度と圧力はそれぞれ T_{c}，P_3 まで短時間のうちに一定体積で上昇する。

(iv) プロセス c→d : 体積 V_1 まで断熱的に膨張し，温度と圧力はそれぞれ T_{d}，P_4 まで減少する。

(v) プロセス d→a : 一定体積で外部へ熱が逃げ，温度と圧力はそれぞれ T_{a}，P_1 まで減少する。

(vi) プロセス a→e : 温度，圧力一定でシリンダーから作業物質が外部に排出される。

以下の問いに答えよ。各設問に対して導出過程も示すこと。

(1) n モルの理想気体において，次式(1)が成り立つことを示せ。

$$C_{\mathrm{p}} = C_{\mathrm{v}} + nR \qquad (1)$$

ただし，C_{p} は定圧熱容量，C_{v} は定積熱容量，R は気体定数である。

(2) 理想気体の準静的断熱過程において，次式(2)を導出せよ。

$$PV^{\gamma} = \text{一定} \qquad (2)$$

ただし，P と V はそれぞれ圧力と体積，また $\gamma = C_{\mathrm{p}}/C_{\mathrm{v}}$ とする。導出には式(1)を用いてよい。

(3) 上記熱力学サイクルにおいて，b→cのプロセスで作業物質に与えられる熱 Q_1 を T_{b}，T_{c} および C_{v} を用いて表せ。また，d→aのプロセスで外部へ放出される熱 Q_2 を T_{a}，T_{d} および C_{v} を用いて表せ。

(4) この熱力学サイクルの熱効率 η を T_{a} と T_{b} の関数として求めよ。式(1)，式(2)を用いてよい。ただし，熱効率は1サイクルで熱力学サイクルが行う仕事を，1サイクルで作業物質に与えられる熱量で割ったものである。なお，プロセスe→a，a→eは熱効率には寄与しないことに留意せよ。

(5) 問2(4)で求めた η の式に基づいて，この熱力学サイクルの熱効率を上げるために，シリンダーおよびピストンを構成する材料として望ましい特性を一つ挙げ，30字程度で理由と共に述べよ。

Department of Materials Engineering
Graduate School of Engineering
The University of Tokyo

Entrance Examination for YR 2020

Fundamentals of Materials Engineering

9:00 am ～ 12:00 pm

Tuesday, August 27, 2019

Examinee No.					

- Attentions -

1) The examination duration is 180 minutes.
2) Select four problems out of eight problems set in the booklets of Fundamentals of Materials Engineering with five problems and Chemistry (Applicants for the Department of Materials Engineering) with three problems. If you answer more than four problems, all your answers will become invalid.
3) You must use only one answering sheet for each problem. Write down the problem number selected on each answering sheet. You may use the reverse side of the answering sheet, if necessary.
4) Answer in English or Japanese.
5) You may use blank spaces of the booklets as calculation sheets.
6) Fill in your examinee number on the booklets.
7) The booklets must NOT be taken out after the exam.

(Calculation Sheet)

(Calculation Sheet)

(Calculation Sheet)

(Calculation Sheet)

【Problem 4】

Suppose that a car composed of a body, a wheel, and a suspension is running on a wavy road as shown in Figure 1. The velocity in the horizontal x-direction v is assumed constant. The body of the car is assumed to be a mass point with a mass m supported by the wheel and the suspension, the masses of which are negligible, and to vibrate only in the vertical y-direction. The suspension has a spring constant k and a damping coefficient c. The height of the car body from the road surface is h_0 in a stationary state. The road has a sinusoidal surface, the height of which is $a\sin(2\pi\, x/l)$. Assume that the wheel never lose contact with the road surface, and that its size is negligible.

First, consider the case of damping coefficient c being sufficiently small.

1. By assuming that the damping coefficient c is negligible, give the equation of motion regarding the vertical position of the car body $y(t)$ using m, k, a, h_0, t, and $\omega = 2\pi v/l$, where t is elapsed time.
2. Derive the formula of the specific frequency of the free vibration of the car body described by the equation obtained in Question 1.
3. Derive the solution of the equation obtained in Question 1 using m, k, a, h_0, t, and ω, after enough time has passed from the start of running to attain steady state vibration. At that time, free vibration of the car body has disappeared by meager damping. Here, using arbitrary variable A, you may express the vertical motion of the car body by the formula $y(t) = A\sin\omega t + h_0$.
4. Derive the formula of the speed at which the car is brought into a resonance state, and then calculate its concrete value with two significant digits. Here, the parameters have the following values.

   $m = 200$ kg, $k = 4000$ kg $\cdot$ s^{-2}, $a = 40$ mm, $l = 8.0$ m, and $v = 50$ km $\cdot$ h^{-1}.

Next, consider the case where damping coefficient c cannot be ignored.

5. Give the equation of motion regarding the vertical position of the car body $y(t)$ using $m,\ k,\ a,\ c,\ h_0,\ t$, and ω.
6. Derive the solution of the equation obtained in Question 5 using $m,\ k,\ a,\ c,\ h_0,\ t$, and ω, after enough time has passed from the start of running to reach steady state in vibration. Here, using arbitrary variables $\delta,\ A,\ B_1$, and B_2, you may express the vertical motion by the formula $y(t) = B_1 \sin \omega t + B_2 \cos \omega t + h_0$, obtain B_1 and B_2, and then derive the solution in the form of $y(t) = A \sin(\omega t - \delta) + h_0$.
7. Derive the formula expressing the ratio between the amplitude of the vertical vibration of the car body in the state of Question 6 and that of the road surface a, and then calculate its concrete value with two significant digits. Calculate the ratio of the amplitude of this vibration to that in the case considered in Question 3 with two significant digits. Here, the parameters have the following values.
$m = 200\ \mathrm{kg}$, $k = 4000\ \mathrm{kg \cdot s^{-2}}$, $a = 40\ \mathrm{mm}$, $l = 8.0\ \mathrm{m}$, $v = 50\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$, and $c = 4.0\ \mathrm{MN \cdot s \cdot m^{-1}}$.

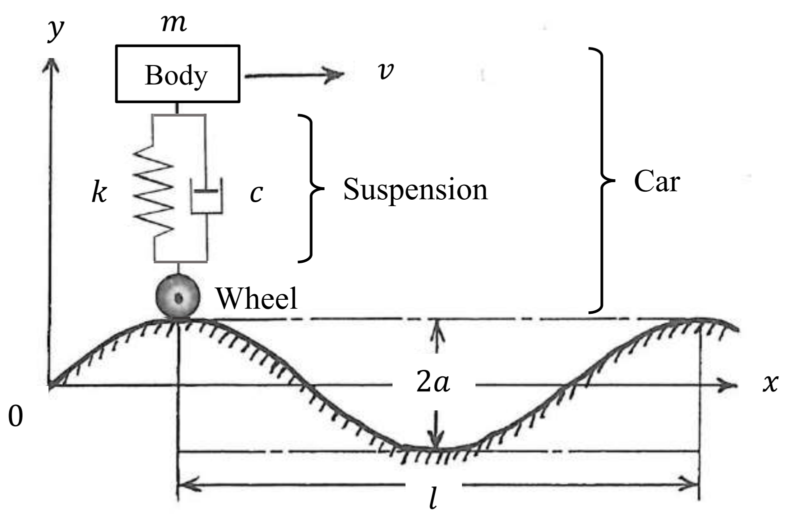

Figure 1

【Problem 5】

Let us consider an alternating current propagating in the z direction in an infinitely long transmission line in the z direction composed of a dielectric (permittivity $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$, where ε_r is relative permittivity and ε_0 is the permittivity of vacuum) sandwiched between two plane-parallel electrodes made of perfect conductor placed perpendicular to x axis separated by distance d as shown in Figure 1. Assume that the electrodes are sufficiently wide in the y direction so that you can ignore the effects of the edges, and that the current propagating in the z direction does not depend on y. Electric field vector $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$ and magnetic flux density vector $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)$ are assumed to exist only between the electrodes and their z components are assumed to be 0. Here, $\boldsymbol{r}$ is the position vector and t is the time. Currents propagating on electrodes along z axis (through unit length in the y direction) are $\boldsymbol{I}_1(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{e}_z I_0 \cos(kz - \omega t)$ on the electrode 1 placed at $x = 0$ and $\boldsymbol{I}_2(\boldsymbol{r}, t) = -\boldsymbol{e}_z I_0 \cos(kz - \omega t)$ on the electrode 2 placed at $x = d$. Here, $\boldsymbol{e}_z$ is the unit vector in the z direction, k is the magnitude of the wave vector, and ω is the angular frequency. In this case, electromagnetic fields obey the following Maxwell's equations:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \tag{1a}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{1b}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{1c}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{i} + \varepsilon \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}, \tag{1d}$$

where ρ is the charge density, $\boldsymbol{i}$ is the current density, and μ_0 is the magnetic permeability of vacuum.

1. Derive the following equation (2) using Maxwell's equations and the vector identity $\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}) = 0$ ($\boldsymbol{A}$ is an arbitrary vector).

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{i} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{2}$$

Show an integral form of Equation (2) and describe its physical meaning in about 30 words.

2. Calculate surface charge density on the electrode 1, $\sigma_1(z,t)$, and that on the electrode 2, $\sigma_2(z,t)$, using Equation (2).

3. Calculate the electric field vector $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ and magnetic flux density vector $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$ in $0 < x < d$ using Maxwell's equations (1a) and (1d).

4. Derive a relationship between k and ω by applying Equation (1c) to $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ and $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$ obtained in Question 3. Calculate the velocity of the alternating current propagating in the transmission line and compare with the light velocity in vacuum. Describe its physical meaning in about 30 words.

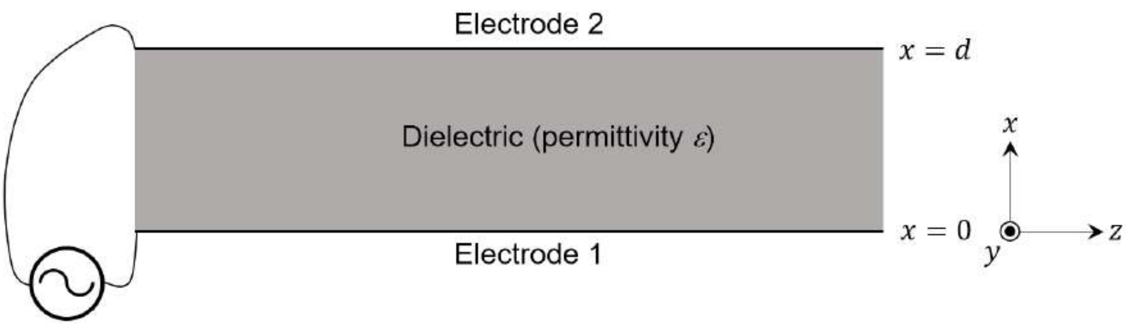

Figure 1

【Problem 6】

1. Consider a particle of energy E_0 and mass m which can move only along the x direction according to one-dimensional Schrödinger equation, given by the following equation (1).

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+V(x)\right)\varphi(x)=E_0\varphi(x) \tag{1}$$

Here, $\varphi(x)$ is the wave function of the particle, $V(x)$ is a potential, and $\hbar=h/2\pi$ (h is Planck's constant).

As shown in Figure 1, the particle enters from the left toward the one-dimensional step-type potential represented by the following equation (2).

$$V(x)=\begin{cases}0 & (x\le 0)\\ V_0 & (x>0)\end{cases} \tag{2}$$

Here, $V_0>0$.

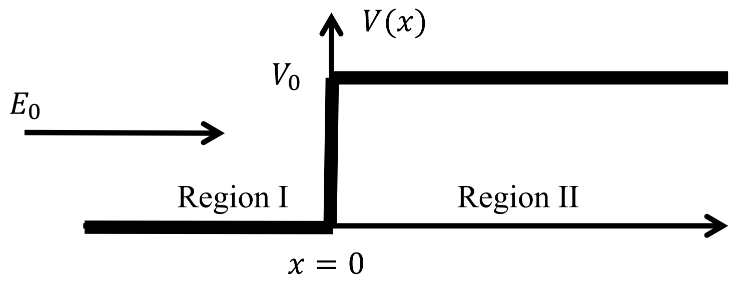

Figure 1

The wave function φ_{I} of the particle in Region I $(x\le 0)$ can be written as the following equation (3):

$$\varphi_{\mathrm{I}}=A\exp(ikx)+B\exp(-ikx)\,. \tag{3}$$

Here, the first and second terms of the right hand side of Equation (3) represent the incidence and reflection of the particle, respectively, $k = \sqrt{\frac{2mE_0}{\hbar^2}}$ and i is the imaginary unit. Answer the following questions.

(1) When the energy of the particle is $E_0 > V_0$, reflection and transmission of the particle occur at the potential barrier at $x = 0$. When the wave function of the particle in Region II $(x > 0)$ is expressed as $\varphi_{\mathrm{II}} = C_1 \exp(ik_1 x)$, express k_1 using m, $\hbar$, E_0, and V_0.

(2) Express the reflectance $R = |B|^2/|A|^2$ and transmittance $T = 1 - R$ of the particle of Question 1(1) using E_0 and V_0.

(3) When a particle of $E_0 < V_0$ enters, the wave function of the particle in Region II $(x > 0)$ is expressed as $\varphi_{\mathrm{II}} = C_2 \exp(-k_2 x)$. In this case, obtain the reflectance R. The derivation process must be shown.

2. Next, the behavior of electrons emitted from a metal surface by applying a uniform electric field with intensity F $(F > 0)$ perpendicular to the metal surface is examined using a simple one-dimensional triangular potential approximation as shown in Figure 2. This triangular potential is given as

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ V_0 - eFx & (x > 0) \, . \end{cases} \tag{4}$$

Assume that $x \leq 0$ corresponds to the region of metal and $x > 0$ corresponds to the region of vacuum. Here, $V_0 > 0$ and e is the elementary charge. A particle of energy E_0 and mass m which can move only along the x direction enters from the left.

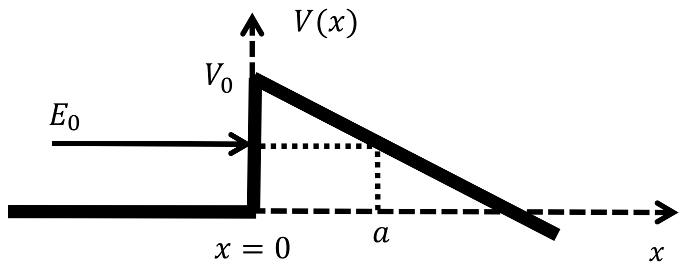

Figure 2

In the case of $E_0 < V_0$, it is assumed that the transmittance T_a at the position of a ($V(a) = E_0$) can be expressed as follows:

$$T_a = \exp\left[-2\int_0^a \sqrt{\frac{2m[V(x) - E_0]}{\hbar^2}}\,dx\right]. \tag{5}$$

Answer the following questions.

(1) Show that the transmittance T_a of the particle can be expressed using W ($= V_0 - E_0$), m, $\hbar$, e, and F as follows:

$$T_a = \exp\left[-\frac{4\sqrt{2m}}{3\hbar eF}W^{3/2}\right]. \tag{6}$$

(2) When E_0 is the Fermi energy of the metal, W in Question 2(1) corresponds to the work function. Here, consider an experiment in which an electric field F is applied perpendicularly to a tungsten surface with a work function of $4.45\ \mathrm{eV}$ to extract electron. Using Equation (6), obtain the electric field F to achieve the transmittance T_a of 6.74×10^{-3}, and obtain the corresponding value of a. Answer with three significant digits. Here, the elementary charge $e = 1.60 \times 10^{-19}\ \mathrm{C}$, $\hbar = 1.05 \times 10^{-34}\ \mathrm{J{\cdot}s}$, and mass of the electron $m = 9.11 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg}$. You may assume that $\ln(6.74 \times 10^{-3}) = -5.00$.

(3) The phenomenon that particles pass through a potential barrier as described in Question 2(2) is called tunnel effect. Give one example of apparatus or device that utilizes the tunnel effect, and explain its operation principle in about 30 words.

【Problem 7】

Consider a process where heterogeneous nucleation of α phase occurs on the grain boundary between two crystal grains (grain 1 and grain 2) of the mother phase β, at a certain temperature T (Figure 1). The nucleus of α phase has lenticular-shaped body, which is approximated by the combination of two bodies given by a part of a sphere with a radius r, as shown in Figure 2. Let the supplementary angle of the angle between the surface of the lenticular solid and the grain boundary be θ $(0 < \theta \leq 90°)$. Let the free energy difference between α phase and β phase per unit volume at the temperature T be $\Delta G_{\mathrm{V}}(T)$ $\left(= G_{\alpha}(T) - G_{\beta}(T)\right)$. Answer the following questions.

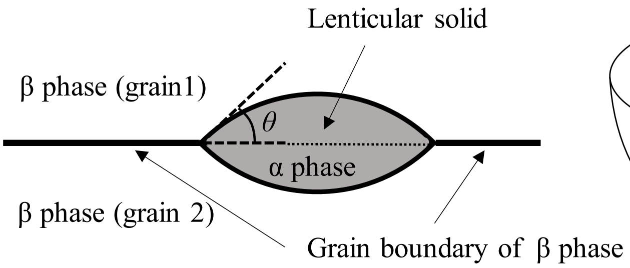

Figure 1

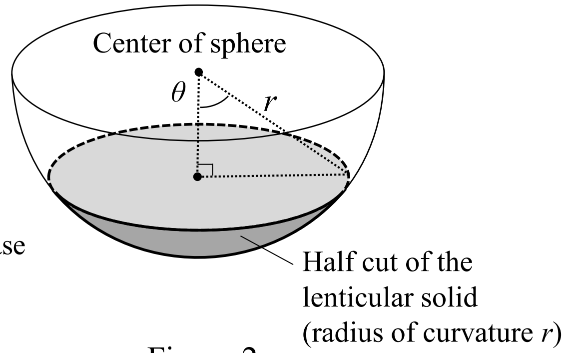

Figure 2

1. Let the interface energy (per unit area) between α phase and β phase be $\sigma_{\alpha\beta}$, and the grain boundary energy (per unit area) between β phase grains be $\sigma_{\beta\beta}$. Formulate the relationship among $\sigma_{\alpha\beta}$, $\sigma_{\beta\beta}$, and θ in Figure 1. Here assume the anisotropy of $\sigma_{\alpha\beta}$ and $\sigma_{\beta\beta}$ is negligible.

2. Prove that the total free energy change ΔE is given by Equation (1) when α phase nucleates as described in Figure 1. For simplicity, denote the surface area and the volume of the α phase in Figure 1 as S and V, respectively. Assume the strain energy due to the nucleation of α phase is negligible.

$$\Delta E = V\Delta G_{\mathrm{V}}(T) + S\sigma_{\alpha\beta} - \pi r^2 \sigma_{\beta\beta}\sin^2\theta \tag{1}$$

3. The nucleus of α phase stably grows when the radius of curvature r is larger than a certain value r^* (the radius of curvature for the critical nucleus). Explain the reason in about 40 words based on Equation (1). Here S and V are given by the following Equations (2) and (3), respectively.

$$S = 4\pi r^2(1 - \cos\theta) \tag{2}$$
$$V = 2\pi r^3(2 + \cos\theta)\,(1 - \cos\theta)^2/3 \tag{3}$$

4. Show that the radius of curvature for the critical nucleus of α phase r^* does not depend on the value of θ.

5. Give the formation energy of the critical nucleus of α phase using $\Delta G_{\mathrm{V}}(T)$, $\sigma_{\alpha\beta}$, and θ.

6. The nucleation rate of α phase is given by the product of two factors: "number density of critical nuclei" and "frequency of atomic attachment on a critical nucleus". Considering the temperature dependences of these two factors, show schematically the graph of the heterogeneous nucleation rate of α phase as a function of temperature, for the temperature range from the $\beta \rightarrow \alpha$ transformation temperature T_0 to the temperature sufficiently lower than T_0. T_0 should be indicated in the figure clearly.

【Problem 8】

1. Consider the binary alloy system of copper (Cu) and iron (Fe). The phase diagram is schematically shown in Figure 1. At $1273\ \mathrm{K}$, the solubility of Fe in Cu is 2.5 at%, and the solubility of Cu in Fe (γ phase) is 3.5 at%. Answer the questions below. Show your derivation process in each problem. Note that the gas constant $R = 8.314\ \mathrm{J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}}$. Answer with three significant digits.

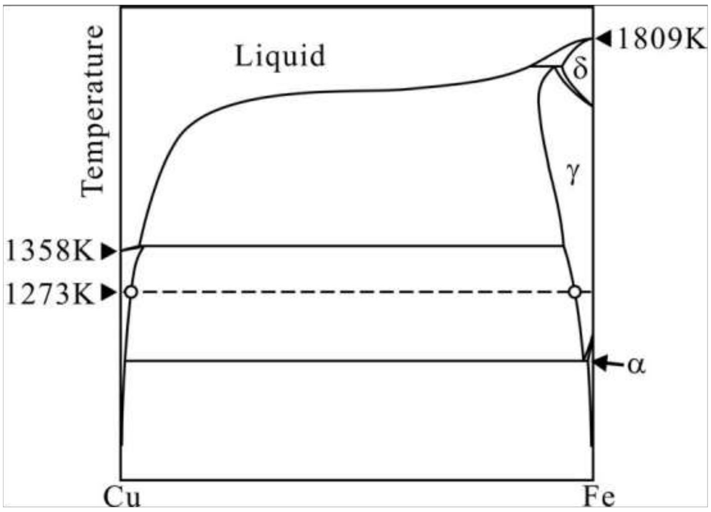

Figure 1

(1) For a dilute solution in a binary system, the vapor pressure p_1 of the solute component 1 is proportional to its mole fraction x_1. Thus, $p_1 = kx_1$ where k is a constant. In the dilute solution, the vapor pressure p_2 of the solvent component 2 is proportional to the mole fraction of the solvent x_2. Thus, $p_2 = x_2 p_2^{\mathrm{o}}$ where p_2^{o} is the vapor pressure for pure component 2. Based on the approximations regarding the vapor pressures of the solute component 1 and solvent component 2, schematically draw the activity of Fe in the Cu-Fe binary alloy at $1273\ \mathrm{K}$ against the mole fraction of Fe.

(2) Obtain the activity of Fe in the Cu-Fe binary alloy with 1 at% Fe at $1273\ \mathrm{K}$.

(3) Calculate the minimum value of the oxygen partial pressure at which $1\ \mathrm{at\%}$ of Fe dissolved in the Cu-Fe binary alloy is oxidized to FeO at $1273\ \mathrm{K}$. Use the standard free energy change ΔG^{o} at temperature T for the reaction below. Formations of oxides of iron and copper other than FeO are negligible.

$$\mathrm{Fe\ (solid)} + \frac{1}{2}\mathrm{O_2\ (gas)} = \mathrm{FeO\ (solid)}$$
$$\Delta G^{\circ} = -264889 + 58.79\,T\ \ \mathrm{J \cdot mol^{-1}}$$

2. A gasoline engine mainly consists of a piston and a cylinder to move the piston by repeating compression, combustion, expansion, etc. of the gas in the cylinder. The following simplified thermodynamic cycle (Otto cycle) as shown in Figure 2 is generally regarded as a model of a gasoline engine. Consider an ideal thermodynamic cycle using an ideal gas as the working substance introduced into and exhausted from the cylinder. The following quasi-static processes are executed in the system.

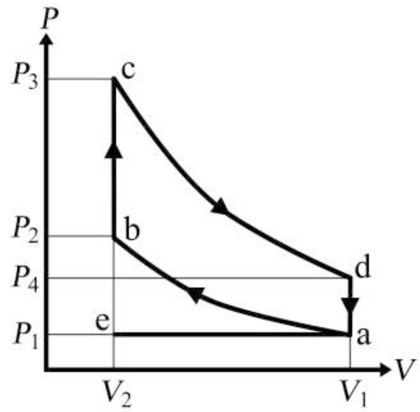

Figure 2

(i) Process e→a: the working substance is introduced into the cylinder up to the volume V_1 at the constant pressure P_1 and the constant temperature T_{a}.

(ii) Process a→b: adiabatic compression to the temperature T_{b}, the volume V_2, and the pressure P_2.

(iii) Process b→c: heat is transferred to the working substance at a constant volume in a short time, and then temperature and pressure increase up to T_c and P_3, respectively.

(iv) Process c→d: adiabatic expansion to the volume V_1. Temperature and pressure decrease to T_d and P_4, respectively.

(v) Process d→a: heat is ejected from the working substance at a constant volume. Temperature and pressure decrease to T_a and P_1, respectively.

(vi) Process a→e: the mass of the working substance is exhausted from the cylinder to the outside at constant temperature and pressure.

Answer the following questions. Show your derivation process.

(1) Show that the following equation (1) applies for an ideal gas of n moles:

$$C_p = C_v + nR. \qquad (1)$$

Here, C_p is the heat capacity at constant pressure, C_v is the heat capacity at constant volume, and R is the gas constant.

(2) Derive the following equation (2), in the case of a quasi-static adiabatic process for an ideal gas:

$$PV^{\gamma} = \text{constant}. \qquad (2)$$

Here, P and V are pressure and volume, respectively, and $\gamma = C_p/C_v$. You can use Equation (1).

(3) Express the heat Q_1 supplied to the working substance in process b→c of the above thermodynamic cycle using T_b, T_c, and C_v. Also, express the heat Q_2 ejected to the outside in process d→a using T_a, T_d, and C_v.

(4) Express the thermal efficiency η of this thermodynamic cycle using T_a and T_b. You can use Equations (1) and (2). Here, the thermal efficiency is defined as the work performed by the thermodynamic cycle in one cycle divided by the amount

of heat supplied to the working substance in one cycle. Note that processes e→a and a→e do not contribute to the thermal efficiency.

(5) Based on the formula of η obtained in Question 2(4), show one property that is desirable for materials of the cylinder and the piston to improve the efficiency of this thermodynamic cycle, together with the reasons in about 20 words.