

2022年度

東京大学大学院 工学系研究科  
マテリアル工学専攻  
入学試験問題

マテリアル工学基礎  
【第4問 材料力学】

2021年9月1日(水) 15:15 ~ 16:00

受験番号(Examinee No.)				

- 注意事項 -

- 1) この問題の試験時間は45分である。
- 2) 解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。
- 3) 解答は、4枚の解答用紙の表面に記入すること。解答用紙には問題の番号と、解答用紙のページ番号を記入すること。
- 4) 解答用紙の裏面には答案を書かないこと。ただし、裏面を下書き用紙として使用してもよい。
- 5) 日本語か英語で解答すること。
- 6) 問題冊子にも受験番号を記入すること。
- 7) 問題冊子は持ち帰らないこと。



(白紙 Blank sheet)

(白紙 Blank sheet)

(白紙 Blank sheet)

## 【第4問】材料力学

材料の変形や破壊を理解するためには、材料内に生じる局所的な応力状態を考慮することが必要である。また、垂直応力やせん断応力に関する変形や破壊のクワイテリオンを考慮することも重要である。以下では、多結晶金属材料における変形および破壊を考える。

1. まず、二次元における応力場を考える。直交座標系 $x_1 - x_2$ における二次元応力場 $\mathbf{T}$ は式①で与えられる。また、図1に示すように元の座標系から角度 $\theta$ 回転した新しい座標系 $x'_1 - x'_2$ における応力場 $\mathbf{T}'$ は式②で与えられる。

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{pmatrix} \quad \text{①} \qquad \mathbf{T}' = \begin{pmatrix} \sigma'_{11} & \sigma'_{12} \\ \sigma'_{12} & \sigma'_{22} \end{pmatrix} \quad \text{②}$$

以下の問いに答えよ。

なお、三角関数の加法定理は下記である。

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

- (1)  $\sigma'_{11}$ ,  $\sigma'_{22}$ ,  $\sigma'_{12}$ を,  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{12}$ ,  $\theta$ を用いて表せ。
- (2)  $\sigma'_{11}$ の最大と最小を求めよ。
- (3)  $|\sigma'_{12}|$ の最大と最小を求めよ。また,  $|\sigma'_{12}|$ の最大と最小を与える角度をそれぞれ $\theta_1$ ,  $\theta_2$ とする。その差 $\Delta\theta (= \theta_1 - \theta_2)$ を求めよ。ただし,  $-\pi/2 \leq \Delta\theta < \pi/2$ とする。
- (4) 上記の結果を参考にして, 材料内で生じるへき開破壊とすべり変形の挙動について80字程度で説明せよ。

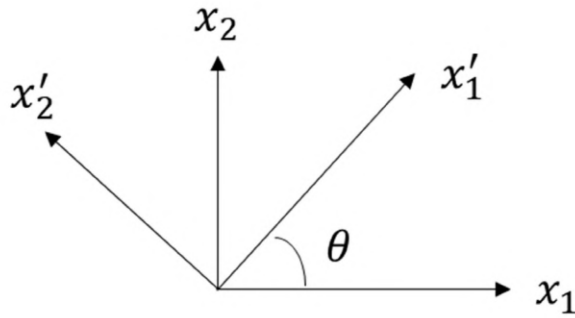


図 1

2. 次に、き裂進展について考える。き裂先端近傍において、図 2 に示すような極座標系  $r - \theta$  における接線応力  $\sigma_{\theta\theta}$  およびせん断応力  $\sigma_{r\theta}$  は、式③と式④で与えられる。

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ K_I \left( \cos \frac{\theta}{2} \right)^2 - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta \right] \quad \text{③}$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} [K_I \sin \theta + K_{II}(3 \cos \theta - 1)] \quad \text{④}$$

ここで、 $K_I$ 、 $K_{II}$  はそれぞれモード I（き裂面に垂直に負荷がかかる場合）およびモード II（き裂面に平行に負荷がかかる場合）の変形に対応する応力拡大係数を表す。例えば、無限に大きな材料中に存在する長さ  $2a$  の二次元貫通き裂にモード I の負荷がかかるとき、 $K_I$  は、 $\sigma_\infty$  を外部応力として、

$$K_I = \sigma_\infty \sqrt{\pi a}$$

で与えられる。

また、き裂先端近傍では、 $\sigma_{\theta\theta}$  が最大の方に引張破壊が生じ、 $\sigma_{r\theta}$  が最大の方にせん断破壊が生じるものと仮定する。ただし、ここでは結晶方位の効果は考慮しないものとする。

以下の問いに答えよ。

- (1) 引張破壊が生じてき裂が進展する場合を考える。き裂にモードⅠの負荷のみが加わる場合のき裂進展方向を求めよ。また、モードⅡの負荷のみが加わる場合のき裂進展方向を求めよ。
- (2) せん断破壊が生じてき裂が進展する場合を考える。き裂にモードⅠの負荷のみが加わる場合のき裂進展方向を求めよ。また、モードⅡの負荷のみが加わる場合のき裂進展方向を求めよ。
- (3) 粒径 $D$ の結晶粒について考える。転位が堆積したすべり面近傍での応力状態はき裂先端近傍での応力状態と同等とみなせるので、粒界に堆積した転位による応力集中が導出できる。この場合の応力拡大係数 $K_{II}$ を、 $\tau$ 、 $\tau_i$ 、 $D$ を用いて表せ。ただし、 $\tau$ はすべり面に働くせん断応力、 $\tau_i$ は転位の摩擦応力であり、すべり面上の転位応力場は均一であると見なしてよい。
- (4) 多結晶金属材料における降伏応力の粒径依存性は、上記の結果を用いると、 $1/\sqrt{D}$ の関数（Hall-Petchの式）で表されることを示せ。

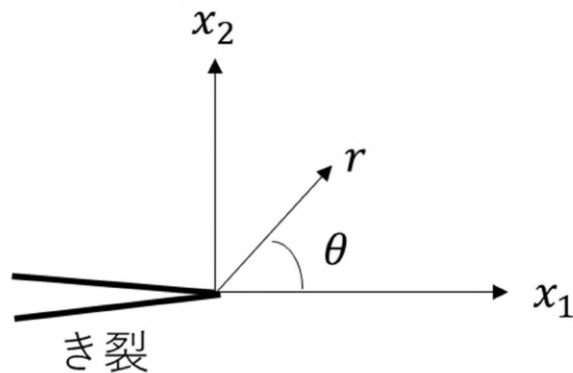


図 2





## 【Problem 4】 Mechanics of materials

In order to understand the deformation and fracture of materials, it is necessary to consider the local stress state that occurs in materials. It is also important to consider the deformation/fracture criteria for normal stress and shear stress. In the following, we consider the deformation and fracture in polycrystalline metallic materials.

1. First, suppose a two-dimensional stress field. A two-dimensional stress field  $\mathbf{T}$  in the Cartesian coordinate system  $x_1 - x_2$  is given by equation ①. Further, the stress field  $\mathbf{T}'$  in the new coordinate system  $x'_1 - x'_2$  shown in Figure 1, which is rotated by angle  $\theta$  from the original coordinate system, is given by equation ②.

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{pmatrix} \quad \text{①} \quad \mathbf{T}' = \begin{pmatrix} \sigma'_{11} & \sigma'_{12} \\ \sigma'_{12} & \sigma'_{22} \end{pmatrix} \quad \text{②}$$

Answer the following questions.

The addition theorem of trigonometric functions is as follows.

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

- (1) Derive  $\sigma'_{11}$ ,  $\sigma'_{22}$ , and  $\sigma'_{12}$  using  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{12}$ , and  $\theta$ .
- (2) Obtain the maximum and minimum of  $\sigma'_{11}$ .
- (3) Obtain the maximum and minimum of  $|\sigma'_{12}|$ .  $\theta_1$  and  $\theta_2$  denote the angles which give the maximum and minimum of  $|\sigma'_{12}|$ , respectively. Also, find the difference  $\Delta\theta$  ( $= \theta_1 - \theta_2$ ). Here,  $-\pi/2 \leq \Delta\theta < \pi/2$ .
- (4) Referring to the above results, explain the behaviors of cleavage fracture and slip deformation that occur in materials in about 60 words.

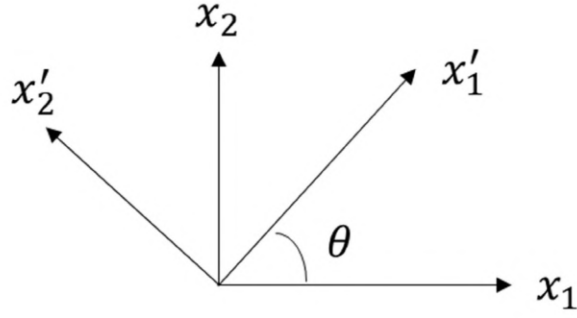


Figure 1

2. Next, consider the crack growth. In the vicinity of a crack tip, the tangential stress  $\sigma_{\theta\theta}$  and the shear stress  $\sigma_{r\theta}$  in the polar coordinate system  $r - \theta$  as shown in Figure 2 are given by equations ③ and ④.

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ K_{\text{I}} \left( \cos \frac{\theta}{2} \right)^2 - \frac{3}{2} K_{\text{II}} \sin \theta \right] \quad \text{③}$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} [K_{\text{I}} \sin \theta + K_{\text{II}} (3 \cos \theta - 1)] \quad \text{④}$$

Here,  $K_{\text{I}}$  and  $K_{\text{II}}$  represent the stress intensity factors corresponding to the deformation of mode I (when the load is applied vertically to the crack surface) and mode II (when the load is applied parallel to the crack surface), respectively. For example, when the mode I load is applied on a two-dimensional through crack with crack length  $2a$  in an infinite medium,  $K_{\text{I}}$  is given by

$$K_{\text{I}} = \sigma_{\infty} \sqrt{\pi a},$$

where  $\sigma_{\infty}$  is the external stress.

Near the crack tip, it is assumed that tensile fracture occurs in the direction of maximum  $\sigma_{\theta\theta}$  and that shear fracture occurs in the direction of maximum  $\sigma_{r\theta}$ . Here, the effect of crystal orientation is not considered.

Answer the following questions.

- (1) Consider the case where tensile fracture occurs and a crack grows. Find the crack growth direction when only the mode I load is applied to the crack. Also, find the crack growth direction when only the mode II load is applied.
- (2) Consider the case where shear fracture occurs and a crack grows. Find the crack growth direction when only the mode I load is applied to the crack. Also, find the crack growth direction when only the mode II load is applied.
- (3) Consider a crystal grain having a diameter of  $D$ . The stress concentration due to the dislocations piled up at the grain boundary can be derived since the stress state near the slip plane with piled-up dislocations can be regarded to be identical to the stress state near the crack tip. Express the stress intensity factor  $K_{II}$  in this case using  $\tau$ ,  $\tau_i$ , and  $D$ . Here,  $\tau$  is the shear stress acting on the slip plane,  $\tau_i$  is the frictional stress of dislocation, and dislocation stress field on the slip plane can be regarded to be uniform.
- (4) Show that the grain size dependence of yield stress in polycrystalline metallic materials is expressed as a function of  $1/\sqrt{D}$  (Hall-Petch relation) using the above results.

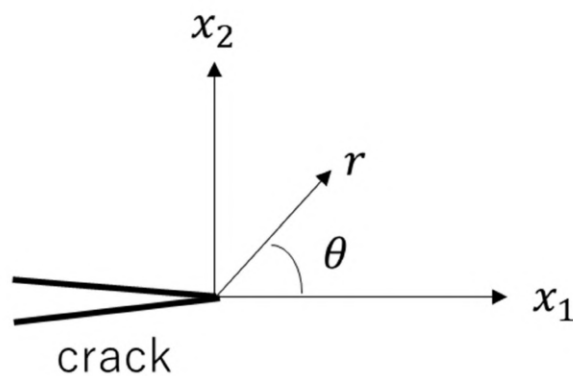


Figure 2

(白紙 Blank sheet)

(白紙 Blank sheet)



Department of Materials Engineering  
Graduate School of Engineering  
The University of Tokyo

Entrance Examination for YR 2022

Fundamentals of Materials  
【Problem 4】 Mechanics of materials

15:15 ~ 16:00  
Wednesday, September 1, 2021

Examinee No.					

- Attentions -

- 1) The examination duration of this problem is 45 minutes.
- 2) Fill in your examinee number and name on the answer sheets.
- 3) You must use only the front side of four answer sheets. Write down the problem number and sheet number of answer sheets on each answer sheet.
- 4) Do not write your answer on the back side of the answer sheets. However, you may use the back side as draft sheets.
- 5) Answer in English or Japanese.
- 6) Fill in your examinee number on the booklets.
- 7) The booklets must NOT be taken out after the exam.